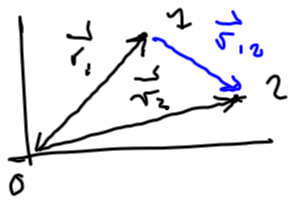
I. Vektoren

I.1 Richtung und Betrag

Ortsvektor = Pfeil vom Bezugspunkt (0) zu einem interessierenden Punkt

Notation: $\vec{r}$, $\vec{x}$, $\underset{\sim}{r}$, $\mathbf{r}$

Verschiebevektor := Pfeil, der Punkt (1) mit Punkt (2) verbindet

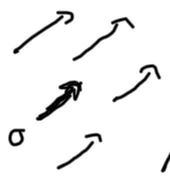


Notation: $\vec{r}_{12}$

Betrag = Länge des Vektors
(Norm) = nichtnegative Zahl, evtl. mit Einheit

Notation: $|\vec{r}| = r$, $|\vec{v}| = v$

Vereinfachung: Pfeilklasse (vergessen Anfangspunkt)
= Menge aller Pfeile gleicher Richtung & Betrags

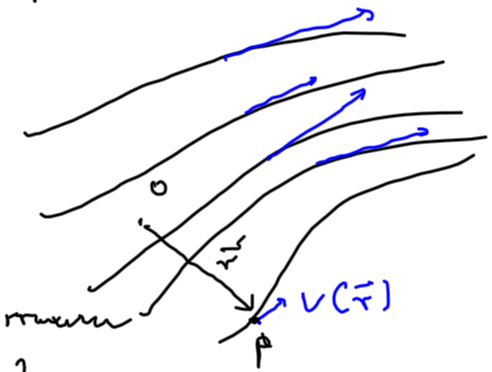


Verschieben ändert nichts

Ausnahme! Ortsvektor

andere Situation:

an jedem Raumpunkt ein Repräsentant eines
<u>anderen</u> Vektors



Physiker: $\vec{V}(\vec{r}_1) \neq \vec{V}(\vec{r}_2)$

„Vektorfeld"

Mathematiker: $\vec{V}: \mathbb{R}^3 \to$ Vektorraum

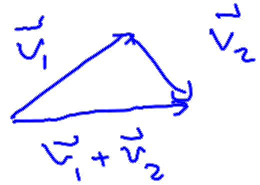
$p \mapsto \vec{V}(p)$

3 Eigenschaften:

(i) Multiplikation mit Zahl

(ii) Addition zweier Vektoren

(iii) Verhalten unter Drehungen



zu (i):

Zahl × Vektor = Vektor mit verändertem Betrag

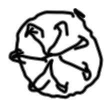
z.B. $2 \times$ ↗ = ↗ , $-1{,}5\,m \times$ ↖ $1\,s^{-1}$ = ↘ $1{,}5\ m/s$

Notation: $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$ $\quad \vec{a}$ ↗ ↙ $-\vec{a}$ „Gegenvektor"

Einheitsvektor = Vektor × $\frac{1}{\text{Betrag}}$ hat Betrag = 1

$$\vec{e} = \frac{1}{a}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \text{so daß} \quad |\vec{e}| = 1$$

$$\text{und} \quad \vec{a} = a\,\vec{e}$$

∃ einen Einheitsvektor für jede Richtung 

zu (ii):

$\vec{a}_1$ → + $\vec{a}_2$ ↘ = 

$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_2 + \vec{a}_1$

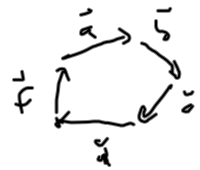
Kommutativ

assoziativ $\quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a} + (\vec{b}+\vec{c})$

Nullvektor $\quad 0\cdot\vec{a} = \vec{0}$

$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Notation: oft $\vec{0} = 0$ $\quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad \forall\,\vec{a}$



$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{f} = \vec{0}$

1. Definition von Vektoren

Vektoren := Elemente eines Vektorraums V über dem Körper $\mathbb{R}$,
d.h. es gelten die folgenden Axiome (1.1)

A) $\forall\ \vec{a}, \vec{b} \in V$ $\exists$ Addition $\vec{a}+\vec{b} \in V$ mit

1) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ Assoziativität
2) $\exists\ \vec{0}: \vec{a}+\vec{0} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}$ Nullvektor
3) $\forall\ \vec{a}\ \exists (-\vec{a}): \quad \vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$ Gegenvektor
4) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ Kommutativität

$(V,+)$ ist kommutative Gruppe

B) $\forall\ \vec{a} \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}$ $\exists$ Skalarmultiplikation $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b} \in V$ mit

1) $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{a}$, $\alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\cdot\vec{a} + \alpha\cdot\vec{b}$ Distributivität
2) $\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a}) = (\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}$ Assoziativität
3) $\exists\ 1,\ 1\cdot\vec{a} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}$ Einselement

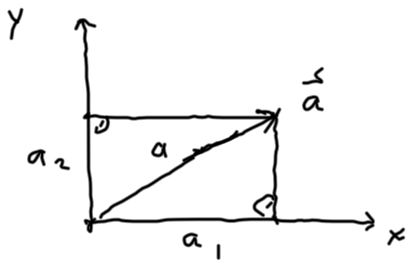
alle Objekte, die diesen Axiomen genügen, sind <u>Vektoren</u>
Betrag oder Richtung nicht erforderlich!

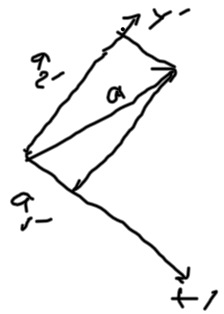
Komponenten

Geometrie → Algebra

zum Abmessen braucht es ein Bezugssystem

Der Vektor ist davon unabhängig!





kartesisches Koordinatensystem

$\vec a \doteq (a_1, a_2)$

Vektor $\vec a$ hat in unserem K-System die Komponenten a_1 & a_2.

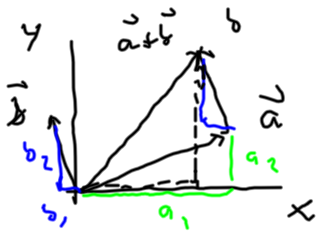
Notation für Ortsvektor:

$\vec r \doteq (x, y)$

gegeben die Komponenten, z.B. im $\mathbb{R}^3$,

$$\vec a \doteq (a_1, a_2, a_3)$$

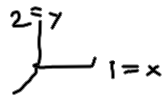
- Betrag: $|\vec a| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (1.2)
- Vielfaches: $\lambda \vec a \doteq (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$ (1.3)
- Summe: $\vec a + \vec b \doteq (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ (1.4)

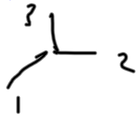


Basisvektoren:
Einheitsvektoren in Richtung der Koord-Achsen:

$\vec e_1 \doteq (1, 0, 0)$, $\vec e_2 \doteq (0, 1, 0)$, $\vec e_3 \doteq (0, 0, 1)$

Rechtssystem

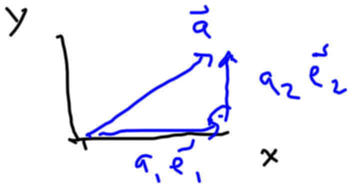




3=z

Zerlegung eines Vektors:

$$\vec a = \vec e_1 a_1 + \vec e_2 a_2 + \vec e_3 a_3 \quad (1.5)$$



Kollinearität:

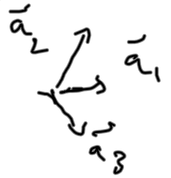
$\vec{a}, \vec{b}$ sind kollinear, falls $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$: $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$

(d.h. entweder $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ oder $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$)

Spezialfall von:

Lineare Abhängigkeit:

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ sind linear unabhängig, falls
$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i = 0$ impliziert, daß $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.



zu (iii):

Verhalten der Komponenten unter passiven Drehungen erlaubt eine feinere Unterscheidung und eine engere ...

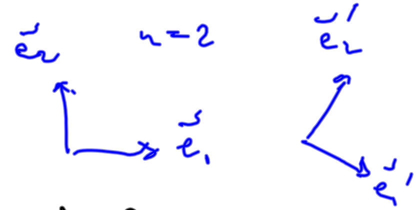
2. Definition von Vektoren:

Vektoren sind Elemente eines Vektorraums (Axiome (1.1)), deren Komponenten <u>linear</u> in $\{\cos\varphi_{ji}\}$ transformieren unter einer Koordinatendrehung $\{\vec{e}_i\} \to \{\vec{e}_j^{\,\prime}\}$ mit $\varphi_{ji} = \sphericalangle(\vec{e}_j^{\,\prime}, \vec{e}_i)$.

$i = 1, \dots, n$

$$\vec{a} \doteq (a_1, a_2) \rightsquigarrow \vec{a} = \vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2$$

$$\vec{a} \doteq (a_1', a_2') \rightsquigarrow \vec{a} = \vec{e}_1^{\,\prime} a_1' + \vec{e}_2^{\,\prime} a_2'$$



dies unterscheidet Vektoren (im engeren Sinn) von

- Skalaren: transformieren <u>nicht</u>
- Tensoren: transformieren mit <u>höheren Potenzen</u> von $\{\cos\varphi_{ji}\}$
- Spinoren: transformieren linear in $\{\cos\frac{1}{2}\varphi_{ji}\}$

feinere Unterscheidung durch Betrachtung von Spiegelung am Ursprung:

$\vec{v}$	$\longmapsto -\vec{v}$	Vektor
$\vec{v}$	$\longmapsto \vec{v}$	Pseudo-Vektoren
α	$\longrightarrow \alpha$	Skalar
α	$\longrightarrow -\alpha$	Pseudo-Skalare

I. 2 Skalarprodukt

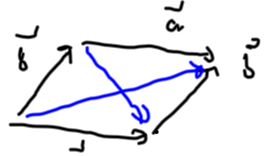
$\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist eine Zahl (Skalar)

soll linear sein in $\vec{a}, \vec{b}$, symmetrisch, ...

haben bereits Betrag (Norm) $\quad |\vec{a}| = a$

Idee: $\quad \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$

Parallelogramm-Gesetz: $\quad |\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2a^2 + 2b^2$



Skalarprodukt: $\quad |\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2 =: 4\, \vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \quad \checkmark$$

$$\left.\begin{aligned} (\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \\ (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda\, \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}\right\} \text{ gilt ebenfalls}$$

geometrisch:

$$(\vec a+\vec b)\cdot(\vec a+\vec b) \quad = \quad |\vec a+\vec b|^2$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$\vec a\cdot\vec a + \vec b\cdot\vec b + 2\,\vec a\cdot\vec b \qquad \text{Längenquadrat von } \vec a+\vec b$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \| \text{ NR}$$

$$a^2+b^2+2\,\vec a\cdot\vec b \qquad a^2+b^2+2ab_\parallel$$

Vergleich: $\vec a\cdot\vec b = a\,b_\parallel$

Trigonometrie: $\vec a\cdot\vec b = a\,b\cos\varphi$

wobei $\varphi = \sphericalangle(\vec a,\vec b)$ (1.6)

auch richtig: $\vec a\cdot\vec b = a_\parallel b$

Vorzeichen: $\vec a\cdot\vec b<0$ wenn Winkel stumpf

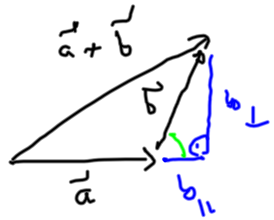
Winkel: $\cos\sphericalangle(\vec a,\vec b) = \dfrac{\vec a\cdot\vec b}{a\,b} = \dfrac{\vec a\cdot\vec b}{\sqrt{\vec a\cdot\vec a\;\vec b\cdot\vec b}}$

Orthogonal: $\vec a\perp\vec b \iff \vec a\cdot\vec b=0$

kollinear: $\vec a\parallel\vec b \iff \vec a\cdot\vec b=\pm ab$

Projektion: $\vec a = \vec e_1a_1+\vec e_2a_2+\dots \iff a_i = \vec a\cdot\vec e_i \quad i=1,2,\dots$

NR:

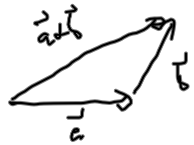


$$|\vec a+\vec b|^2 = (a+b_\parallel)^2+b_\perp^2$$
$$= a^2+2ab_\parallel+\underbrace{b_\parallel^2+b_\perp^2}$$
$$= a^2+2ab_\parallel+b^2$$

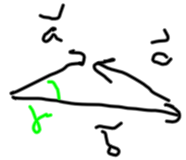
$$\frac{b_\parallel}{b} = \cos\varphi$$

Anwendungen in Geometrie:

- Schwarzsche Ungleichung: $|\vec a \cdot \vec b| \le ab$ (1.7)
- Dreiecksungleichung: $|a-b| \le |\vec a + \vec b| \le a+b$ (1.8)



- Kosinussatz:



$$\vec c = \vec a - \vec b$$
$$\vec c \cdot \vec c = (\vec a - \vec b)\cdot(\vec a - \vec b)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,\vec a \cdot \vec b = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

- Orthogonal-Zerlegung

$\vec F = \vec F_{\parallel} + \vec F_{\perp}$ relativ zu einem $\vec v$

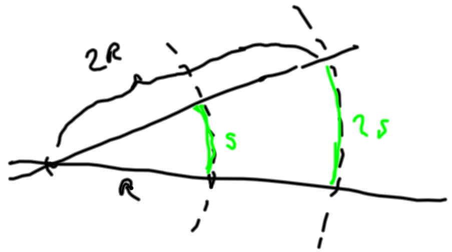
$$\vec v \cdot \vec F = v F_{\parallel} \rightsquigarrow F_{\parallel} = \frac{\vec v}{v}\cdot \vec F \rightsquigarrow \vec F_{\parallel} = F_{\parallel}\frac{\vec v}{v} = \left(\vec F \cdot \frac{\vec v}{v}\right)\frac{\vec v}{v}$$
$$\rightsquigarrow \vec F_{\perp} = \vec F - \vec F_{\parallel}$$

- Arbeit

$A = \vec F \cdot \vec s$ Kraft · Weg

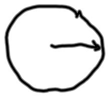
...

über Winkel:



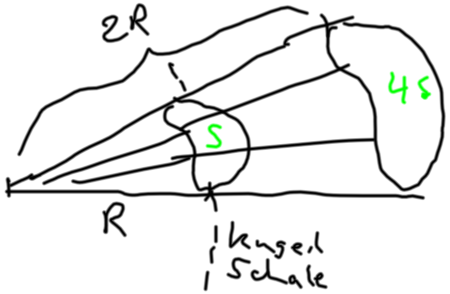
$\varphi = s/R$ dim'los

$s = R \cdot \varphi$

Vollwinkel  $\varphi = 2\pi$

rechter Winkel  $\varphi = \pi/2$

Raumwinkel:



$\Omega = S/R^2$

Form der Fläche egal

Skalarprodukt in Komponenten:

Einheitsvektoren:

$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 \qquad \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 \qquad$ etc.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{e}_1 a_1 + \vec{e}_2 a_2) \cdot (\vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 b_2)$$

$$= \vec{e}_1 a_1 \cdot \vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_1 a_1 \cdot \vec{e}_2 b_2 + \vec{e}_2 a_2 \cdot \vec{e}_1 b_1 + \vec{e}_2 a_2 \cdot \vec{e}_2 b_2$$

$$= a_1 b_1 + 0 + 0 + a_2 b_2$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

in 3D:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad (1.9)$$

merke: Komponenten sind basisabhängig, Skalarprodukt <u>nicht</u>

Spezialfall: $\vec{b} = \vec{a} \rightsquigarrow \vec{a}^2 = a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

I.3 Kreuzprodukt

elektr. gel. Teilchen, Geschw. $\vec{v}$, im Magnetfeld $\vec{B}$, spürt Kraft $\vec{F}$

experimentell: $\vec{F} \perp \vec{v}$, $\vec{F} \perp \vec{B}$, $F = \underset{\text{Ladung}}{q}\, v\, \underset{\text{Anteil} \perp \vec{v}}{B_\perp}$

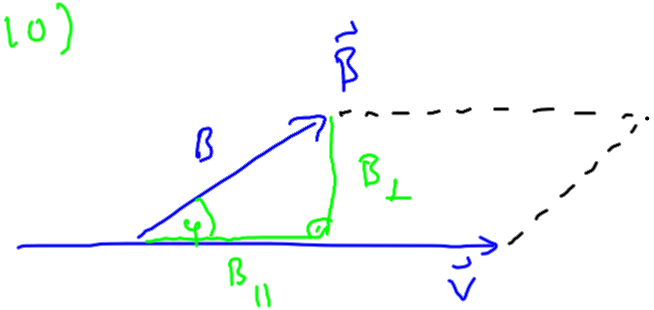
$(\vec{v}, \vec{B}, \vec{F})$ bilden ein Rechtssystem

Daumen, Zeige-, Mittel-Finger

dies definiert eindeutig das Kreuzprodukt

$$\vec{F} = q\, \vec{v} \times \vec{B} \qquad (1.10)$$

Betrag von $\vec{F}$? berechne $B_\perp$



$B_\parallel = B \cdot \cos\varphi$

$B_\perp = B \cdot \sin\varphi$

Test: $B_\parallel^2 + B_\perp^2 \overset{?}{=} B^2$

also, $F = q\, v\, B \sin\varphi$

$= q \cdot$ (Fläche des von $\vec{v}$ & $\vec{B}$ erzeugten Parallelogramms)

Def.: $\left.\begin{array}{l}\vec{a}\times\vec{b} = \vec{e}\, ab \sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \\ \vec{e}\perp(\vec{a},\vec{b}) \quad , \quad (\vec{a},\vec{b},\vec{e}) \text{ Rechtssystem}\end{array}\right\}$ (1.11)

merke: nur in 3 Dimensionen!

Eigenschaften:

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ antisymmetrisch

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}_\perp = \vec{a}_\perp\times\vec{b}$

$\vec{a}\times\vec{a} = 0$

$\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

$\vec{a}\perp\vec{b} \iff |\vec{a}\times\vec{b}| = ab$

$\vec{a}\parallel\vec{b} \iff \vec{a}\times\vec{b} = 0$

$\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0 \quad , \quad \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$

$\underbrace{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})}_{\text{in } (\vec{b},\vec{c})\text{-Ebene}} \neq \underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}}_{\text{in } (\vec{a},\vec{b})\text{-Ebene}}$

$$\vec a \times (\vec b \times \vec c) = \vec b\,(\vec a\cdot\vec c) - \vec c\,(\vec a\cdot\vec b)$$ „bac - cab" Regel

Entwicklungssatz [1.12]

Beweis:

- wir wissen daß $\vec a\times(\vec b\times\vec c) \in (\vec b,\vec c)$-Ebene
- also: $\vec a\times(\vec b\times\vec c) = \beta\,\vec b+\gamma\,\vec c$ finde β, γ
- skalar multiplizieren mit $\vec a$:

$$0 = \beta\,\vec a\cdot\vec b + \gamma\,\vec a\cdot\vec c$$

- Lösung: $\beta = \lambda\,\vec a\cdot\vec c$, $\gamma = -\lambda\,\vec a\cdot\vec b$ finde λ

$$\longrightarrow \quad \vec a\times(\vec b\times\vec c) = \lambda\,\vec b\,(\vec a\cdot\vec c) - \lambda\,\vec c\,(\vec a\cdot\vec b)$$

- Spezialfall: $\vec a = \vec b = \vec e_1$, $\vec c = \vec e_2$

$$\underbrace{\vec e_1\times(\vec e_1\times\vec e_2)}_{=\,\vec e_1\times\vec e_3\,=\,-\vec e_2} = \underbrace{\lambda\,\vec e_1\underbrace{(\vec e_1\cdot\vec e_2)}_{=\,0} - \underbrace{\lambda\,\vec e_2(\vec e_1\cdot\vec e_1)}_{=\,-\lambda\vec e_2}}_{-\lambda\vec e_2}$$

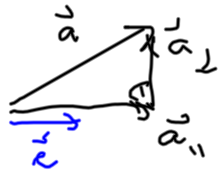
$\rightsquigarrow \quad \lambda = 1$ q.e.d.

$$\vec a \times (\vec b \times \vec c) + \vec b \times (\vec c \times \vec a) + \vec c \times (\vec a \times \vec b) = 0 \qquad (1.13)$$

Jacobi-Identität

Orthogonal-Zerlegung von $\vec a$ in Richtung $\vec e$

$$\vec a = \vec a_{\parallel} + \vec a_{\perp} \qquad \vec e \cdot \vec e = 1$$



$$\left.\begin{aligned} \vec a_{\parallel} &= (\vec a \cdot \vec e)\,\vec e \\ \vec a_{\perp} &= \vec e \times (\vec a \times \vec e) = \vec a\,(\vec e \cdot \vec e) - \vec e\,(\vec e \cdot \vec a) = \vec a - \vec a_{\parallel} \end{aligned}\right\} \quad (1.14)$$

Kreuzprodukt in Komponenten:

$$\begin{aligned} \vec a \times \vec b &= (\vec e_1 a_1 + \vec e_2 a_2 + \vec e_3 a_3) \times (\vec e_1 b_1 + \vec e_2 b_2 + \vec e_3 b_3) \\ &= \cancel{\vec e_1 \times \vec e_1\, a_1 b_1} + \vec e_1 \times \vec e_2\, a_1 b_2 + \vec e_1 \times \vec e_3\, a_1 b_3 \\ &\quad + \vec e_2 \times \vec e_1\, a_2 b_1 + \cancel{\vec e_2 \times \vec e_2\, a_2 b_2} + \vec e_2 \times \vec e_3\, a_2 b_3 \\ &\quad + \vec e_3 \times \vec e_1\, a_3 b_1 + \vec e_3 \times \vec e_2\, a_3 b_2 + \cancel{\vec e_3 \times \vec e_3\, a_3 b_3} \\ &= \vec e_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec e_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \vec e_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) \qquad (1.15) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Schema:

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ \hline a_1 & b_1 \end{array}$$

$\times \rightsquigarrow c_1$

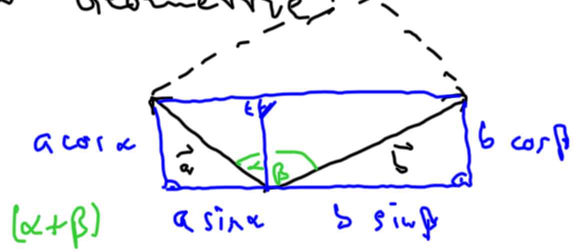
$\times \rightsquigarrow c_2$

$\times \rightsquigarrow c_3$

Tabelle: $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$

$i \backslash j$	1	2	3
1	0	$\vec{e}_3$	$-\vec{e}_2$
2	$-\vec{e}_3$	0	$\vec{e}_1$
3	$\vec{e}_2$	$-\vec{e}_1$	0

Anwendung in der Geometrie:



$$F_{\square} = F_{\text{▱}}$$

$$= |\vec{a} \times \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$F_{\square} = F_{\square} + F_{\square} = a \sin\alpha \cdot b \cos\beta + a \cos\alpha \cdot b \sin\beta$$

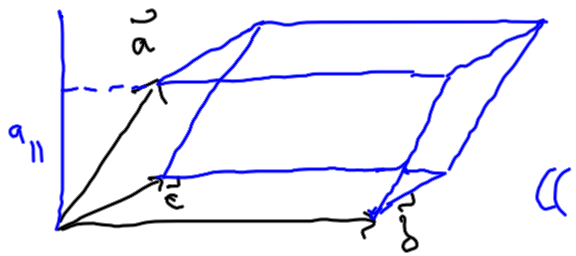
Additions-Theorem

mehrfache Produkte:

$$\left.\begin{aligned}(\vec a\times\vec b)\cdot(\vec c\times\vec d) &= (\vec a\cdot\vec c)(\vec b\cdot\vec d)-(\vec a\cdot\vec d)(\vec b\cdot\vec c)\\ (\vec a\times\vec b)^2 &= a^2b^2-(\vec a\cdot\vec b)^2\end{aligned}\right\}\quad (1.16)$$

kann negativ sein

$$\vec a\cdot(\vec b\times\vec c) = a_{\parallel}\cdot|\vec b\times\vec c| =$$ Volumen des von $\vec a,\vec b,\vec c$ aufgespannten Spats



„Spatprodukt" (1.17)

$$\vec a\cdot(\vec b\times\vec c) = \vec b\cdot(\vec c\times\vec a) = \vec c\cdot(\vec a\times\vec b)$$
$$(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c = (\vec b\times\vec c)\cdot\vec a = (\vec c\times\vec a)\cdot\vec b$$

In Komponenten:

$$\vec a\cdot(\vec b\times\vec c) = a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$$
$$= \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\qquad (1.18)$$

Rechenschema:

$$\left|\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array}$$

„Sarrus-Regel"

I.4 Index-Schreibweise

Skalarprodukt:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{array} \right\} =: \delta_{ij}$$

Kronecker-Symbol

Tabelle δ_{ij}

$j \backslash i$	1	2	3
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\sum_i \vec{e}_i a_i\right) \cdot \left(\sum_j \vec{e}_j b_j\right) = \sum_{i,j} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \, a_i b_j$$

$$= \sum_{i,j} \delta_{ij} a_i b_j = \sum_{i=j} \delta_{ij} a_i b_j = \sum_i a_i b_i \qquad (1.9')$$

Kreuzprodukt:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_k \vec{e}_k c_k(ij) = \sum_k \vec{e}_k \varepsilon_{kij}$$

Levi-Civita-Tensor (ε-Symbol)

ε ist nicht Null für

i	j	k	ε_{ijk}
1	2	3	1
1	3	2	-1
2	3	1	1
2	1	3	-1
3	1	2	1
3	2	1	-1

$\varepsilon = 0$ falls zwei Indizes gleich

$$\vec a \times \vec b = \Big(\sum_i \vec e_i a_i\Big) \times \Big(\sum_j \vec e_j b_j\Big) = \sum_{i,j} \vec e_i \times \vec e_j \, a_i b_j$$

$$= \sum_{i,j} \sum_k \vec e_k \varepsilon_{kij} a_i b_j = \sum_{i,j,k} \vec e_k \varepsilon_{kij} a_i b_j \quad (1.15')$$

$$(\vec a \times \vec b)_k = \sum_{i,j} \varepsilon_{kij} a_i b_j \qquad (1.15'')$$

$$(\vec a \times \vec b)_\ell = (\vec a \times \vec b) \cdot \vec e_\ell = \sum_{i,j,k} \vec e_k \cdot \vec e_\ell \, \varepsilon_{kij} a_i b_j$$

$$= \sum_{i,j,k} \delta_{k\ell} \varepsilon_{kij} a_i b_j = \sum_{i,j} \varepsilon_{\ell ij} a_i b_j$$

Spatprodukt

$$\vec a \cdot (\vec b \times \vec c) = \sum_k a_k (\vec b \times \vec c)_k = \sum_{k,i,j} a_k \varepsilon_{kij} b_i c_j$$

$$= \sum_{k,i,j} \varepsilon_{kij} a_k b_i c_j \qquad (1.18')$$

Determinante $|\vec a, \vec b, \vec c| =$

Rechenregeln / Eigenschaften

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{jik}$$

$$\sum_j \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik} \qquad \sum_{ij} \delta_{ij}\delta_{ji} = \sum_i \delta_{ii} = 3 \qquad (1.19)$$

$$\sum_{ij} \delta_{ij}\,\varepsilon_{ijk} = 0$$

$$\sum_k \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \qquad (1.20)$$

dies ist das Gleiche wie $(\vec a \times \vec b)\cdot(\vec c \times \vec d) = \vec a\cdot\vec c\;\vec b\cdot\vec d - \vec a\cdot\vec d\;\vec b\cdot\vec c$

$$\sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ljk} = 2\,\delta_{il} \qquad \Big|\; \sum_j (1.20)\,\delta_{mj} = \ldots$$

$$\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = 6$$

Einsteins Summationskonvention: lasse $\sum$ weg